ISSN-3030-3885

INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC BULLETIN

VOLUME 2, ISSUE 2, OCTOBER 2025

ISSN 3030 – 3885

INTERNATIONAL JOURNAL

OF SCIENTIFIC BULLETIN

International Scientific Electronic Journal

International journal of Scientific Bulletin

Xalqaro ilmiy axborot jurnali

MUASSIS:

TAHRIRIYAT | EDITORIAL

Jamoatchilik kengashi raisi:

Bosh muharrir
A. M. Xurmamatov – texnika fanlari doktori, professor

Ma’sul muharrir:
M. A. Mirsaidov – texnika fanlari falsafa doktori, dotsent
Ma’sul muharrir yordamchisi:
B. H. Haydarov – texnika fanlari falsafa doktori, v.b.dotsent
Nashr uchun mas’ul:
A. D. Kambarov

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan berilgan № 140275 raqamli guvohnoma asosida ro‘yxatga olingan.

Tahririyat manzili:
Farg‘ona viloyati, Dang‘ara tumani, Uvaysiy ko‘chasi, 26-uy
Telefon: +998943313030
E-mail: bekzodhaydarov1303@gmail.com

Tahrir kengashi a’zolari:

τ-closed and τ-open sets and their properties

Kholmatov Dostonbek Dilshod ugli
Assitant of the Department of "Economics and Exact Sciences", University of Silk Road Innovations

Annotation: The article presents the properties of the τ-closure operator and their proofs. Also, these properties help to better understand the definitions and examples of τ-closed sets, τ-open sets, τ-neighborhood, τ-interior, and τ-boundary of sets. As an innovation presented in the article, the theorem relating the τ-closure operator of a set to the Cartesian product of sets and its proof are presented in detail, and the conclusions arising from it are given.

Keywords: τ-closure, set power, τ-density, τ-closed set, τ-open set, τ-neighborhood of a point, τ-boundary, Cartesian product.

τ-замкнутые и τ-открытые множества и их свойства

Университет инноваций Шёлкового пути, Ассистент кафедры «экономики и точных науки»
Холматов Достонбек Дилшодивич
преподаватель математики

Аннотация: В статье представлены свойства оператора τ-замыкания и их доказательства. Кроме того, эти свойства помогают лучше понять определения и примеры τ-замкнутых множеств, τ-открытых множеств, τ-окрестности, τ-внутренности и τ-границы множеств. В качестве нововведения в статье подробно изложены теорема, связывающая оператор τ-замыкания множества с декартовым произведением множеств, её доказательство и вытекающие из неё выводы.

Ключевые слова: τ-замыкание, мощность множества, τ-плотность, τ-замкнутое множество, τ-открытое множество, τ-окрестность точки, τ-граница, декартово произведение.

τ-yopiq va τ-ochiq toʻplamlar va ularning xossalari

Xolmatov Dostonbek Dilshod oʻgʻli
Ipak yoʻli innovatsiyalar universiteti "Iqtisodiyot va aniq fanlar" kafedrasi assistenti

Annotatsiya: Maqolada τ-yopilma operatorining xossalari va ularning isbotlari keltirilgan. Shuningdek, bu xossalar τ-yopiq toʻplamlar, τ-ochiq toʻplamlar, toʻplamlarning τ-atrofi, τ-ichi, τ-chegaralari haqidagi ta`rif va misollarni yaxshiroq anglashga yordam beradi. Maqolada keltirilgan yangilik sifatida toʻplamning τ-yopilma operatorini toʻplamlarning dekart koʻpaytmasi bilan aloqador teorema va uning isboti batafsil keltirilgan boʻlib, undan kelib chiqadigan xulosalar berilgan.

Kalit soʻzlar: τ-yopilma, toʻplam quvvati, τ-zichlik, τ-yopiq toʻplam, τ-ochiq toʻplam, nuqtaning τ-atrofi, τ-chegara, dekart koʻpaytma.

Kirish.

Ta'rif. A toʻplamning τ-yopilmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$[A]_\tau = \bigcup |\bar{B} : B \subset A, |B| \le \tau|.$$

Teorema. $X - T_1$ topologik fazo bo‘lsin. To‘plamning τ-yopilma operatori quyidagi xossalarga ega:

1) $[X]_\tau = X$;

2) $[\emptyset]_\tau = \emptyset$;

3) $A \subset [A]_\tau$;

4) $[A \cup B]_\tau = [A]_\tau \cup [B]_\tau$;

5)$[[A]_\tau]_\tau = [A]_\tau$.

Isbot. Har qanday X fazo uning to‘plamotilari bilan qoplanishi mumkin, ularning quvvati τ dan oshmaydi. Bu shuni anglatadiki, har bir fazo o‘zining τ-yopilmasiga to‘g‘ri keladi. Bo‘sh to‘plamning yagona to‘plamosti yopilmasi o‘ziga teng bo‘lgan bo‘sh to‘plamdir. Va bu o‘zining τ-yopilmasiga teng ekanligini anglatadi. 1) va 2) xossalar isbotlandi.

3) xossa to‘g‘ri, chunki har qanday A to‘plam quvvati τ dan oshmaydigan B to‘plamostilar bilan qoplanishi mumkin, ya'ni.

$$A = \bigcup \{B; |B| \leq \tau\} \subset \bigcup \{\bar{B}: |B| \leq \tau\} = [A]_\tau.$$

4) xossa uchun $A \subset A \cup B$ va $B \subset A \cup B$ ekanligidan $[A]_\tau \subset [A \cup B]_\tau$ va $[B]_\tau \subset [A \cup B]_\tau$. Bundan kelib chiqadiki

$$[A]_\tau \cup [B]_\tau \subset [A \cup B]_\tau$$

Har bir to‘plam o‘zining τ-yopilmasining to‘plamostisi bo‘lgani uchun, ya`ni $A \subset [A]_\tau, B \subset [B]_\tau$ (3-xossaga ko‘ra), $A \cup B \subset [A]_\tau \cup [B]_\tau$ bo‘ladi. Shuning uchun $[A \cup B]_\tau = [A]_\tau \cup [B]_\tau$.

5-xossani isbotlaylik. A to‘plamostining τ-yopilmasi sifatida $[A]_\tau = \cup\{\bar{B}: B \subset A, |B| \leq \tau\}$ ni olaylik va uni M bilan belgilaymiz.

$$[[A]_\tau]_\tau = [M]_\tau = \bigcup \{\bar{C}: C \subset M, |C| \leq \tau\}.$$

Quvvati τ dan oshmaydigan har qanday $C \subset M$ to‘plamostini uning elementlari orqali ifodalanishi mumkin, ya'ni $C = \{x_s: s \in S, |S| \leq \tau$. $C \subset \cup\{\bar{B}: B \subset A, |B| \leq \tau\}$ ekanli uchun $\{\bar{B}: B \subset A, |B| \leq \tau\}$ oiladan quyidagi qism oilani olishimiz mumkin $\{\overline{B_s}: x_s \in \overline{B_s}, s \in S\}$. $\{B_s: x, \in \overline{B_s}, s \in S\}$ oilaning barcha elementlarining birlashmasini B^* bilan belgilaymiz. Har bir $s \in S$ uchun B_s to‘plamning quvvati τ dan oshmaganligi uchun B^* ning quvvati τ dan oshmaydi. U holda, $\bar{C} \subset \bar{B}^*$. To‘plam yopilmasining xossalariga ko‘ra $\bar{C} \subset \bar{B}^*$. Bu degani barcha $C \subset M$, $|C| \leq \tau$ uchun $C \subset [A]_\tau$. Shuning uchun

$$[[A]_\tau]_\tau \subset [A]_\tau.$$

Ushbu munosabat $[A]_\tau \subset [[A]_\tau]_\tau$ 3-xossadan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi. ■

Agar $[A]_\tau = X$ bo‘lsa, A to‘plamosti X da τ-zichdir. X fazoning har qanday A va B to‘plamostilari uchun quyidagi munosabat o‘rinli: agar $A \subset B$ bo‘lsa, $[A]_\tau \subset [B]_\tau$.

Misol. Tabiiy topologiyaga ega haqiqiy sonlar to‘plamida biz barcha ratsional sonlar to‘plamini olaylik. Uning ω-yopilishini topamiz: $[Q]_\omega = \cup\{\bar{B}: B \subset Q|B\ |\leq \omega\}$. To‘plamosti sifatida $B \subset Q$, $|B| \leq \omega$ biz Q to‘plamning o‘zini olamiz, uning yopilmasi haqiqiy sonlar to‘plamiga to‘g‘ri keladi. Bu shuni anglatadiki, $[Q]_\omega = \mathbb{R}$ va Evklid chizig‘idagi ratsional sonlar to‘plami ω-zich degan xulosaga kelishimiz mumkin.

Ta'rif. X topologik T_1-fazo bo‘lsin. Agar har bir $B \subset F$ uchun, bunda $|B| \leq \tau$, B to‘plamning yopilmasi F da yotsa, $F \subset X$ to‘plam X da τ-yopiq deyiladi.

Misol. R haqiqiy sonlar to‘plamida to‘ldiruvchisi sanoqli bo‘lgan barcha to‘plamlar ochiq deb faraz qilamiz va bo‘sh to‘plamni ham ochiq deb olamiz, ya’ni R haqiqiy sonlar to‘plami quyidagi topologiyaga ega:

$\theta = |\emptyset| \cup (U: U \subset \mathbb{R}, |\mathbb{R} \backslash U| \leq \omega\}$

To‘ldiruvchisining quvvati ω dan oshmaydigan har bir to‘plam ushbu topologik fazoda ochiq bo‘lgani uchun, ixtiyoriy sanoqli $B \subset X$ to‘plam yopiqdir. Keling, ixtiyoriy $M \subset \mathbb{R}$ to‘plamostini olaylik. $B \subset M$ quvvati ω dan oshmaydigan har bir to‘plamosti o‘zining yopilmasi bilan to‘g‘ri keladi, ya'ni hamma $|B| \leq \omega$ uchun $\bar{B} \subset M$. M to‘plamning ixtiyoriy ekanligidan bu fazoning har bir to‘plamostisi ω-yopiq ekanligi kelib chiqadi. Xususan, bu fazodagi barcha irratsional sonlar to‘plami ω-yopiq, lekin yopiq emas.

Ta'rif. Agar G to‘plamning $X \setminus G$ to‘ldiruvchisi τ-yopiq bo‘lsa, $\mathrm{G} \subset X$ to‘plam X da τ-ochiq deyiladi. $x \in X$ nuqtani o‘z ichiga olgan har qanday τ-ochiq to‘plamga bu nuqtaning τ-atrofi deyiladi.

Misol. R haqiqiy sonlar to‘plamida quyidagi oilani ko‘rib chiqamiz:

$\theta = \{U \subset R: |R \setminus U| \leq \omega\} \cup \{\emptyset\}$

(R, θ) topologik fazo ekanligini tekshirish oson. Har qanday sanoqli to‘plam yopiq bo‘lgani uchun, R ning ixtiyoriy to‘plamostisi θ topologiyaga nisbatan ω-yopiq bo‘lib, xususan, barcha irratsional sonlar to‘plami I ham shundaydir. Bundan barcha ratsional sonlar to‘plami $\mathbb{Q}$ ω-ochiq, lekin ochiq emasligi kelib chiqadi.

Ta'rif. X topologik T_1-fazo bo‘lsin. X ning A to‘plamostisining τ-ichi deb, A ning barcha τ-ochiq to‘plamostilarining birlashmasiga aytiladi va $Int_\tau A$ bilan belgilanadi.

$$Int_\tau A = \bigcup \{U: U \subset A \text{ va } U\ \tau\text{-ochiq}\}.$$

Tasdiq. Har bir $A \subset X$ uchun $\mathrm{Int}_\tau\ A = X - [X - A]_\tau$ o‘rinli.

Isbot: τ-yopilma operatorining ta'rifi bo‘yicha

$$[X - A]_\tau = \bigcap \{M: X - A \subset M \text{ va } M \text{ to‘plam } X \text{ da } \tau\text{-yopiq}\}.$$

Shuning uchun

$$X - [X - A]_\tau = X - (\bigcap \{M: X - A \subset M \text{ va } M \text{ to‘plam } X \text{ da } \tau\text{-yopiq}\}).$$

De Morgan qonunlariga ko‘ra

$$X - [X - A]_\tau = \bigcup \{X - M: X - A \subset M \text{ va } M \text{ to‘plam } X \text{ da } \tau\text{-yopiq}\}$$

Shuning uchun,

$$X - [X - A]_\tau = \cup\{X - M: X - M \subset A \text{ va } M \text{ to‘plam } X \text{ da } \tau\text{-yopiq}\} = \mathrm{Int}_\tau A.$$

Ta'rif. Agar x nuqtaning ixtiyoriy τ-ochiq atrofi A to‘plam va uning $X \setminus A$ to‘ldiruvchisi bilan kesishmasi bo‘sh bo‘lmasa, $x \in X$ nuqta A to‘plamostining τ-chegaraviy nuqtasi deyiladi. $A \subset X$ to‘plamning barcha τ-chegaraviy nuqtalar to‘plami A to‘plamning τ-chegarasi deb ataladi va $Fr_\tau A$ bilan belgilanadi.

$A \subset X$ to‘plamning τ-chegarasi A to‘plamning τ-yopilmasi va uning $X \setminus A$ to‘ldiruvchisining τ-yopilmasi kesishishidan iboratdir , ya’ni.

$Fr_\tau A = [A]_\tau \cap [X \setminus A]_\tau$.

Endi to‘plamning τ-yopilmasini to‘plamlarning dekart ko‘paytmasiga qo‘llaganda qanday xossalarga ega ekanligini ko‘rib chiqamiz. Bunda dekart ko‘paytmadagi to‘plamlar τ-yopiq bo‘lsa, to‘plamning dekart ko‘paytmasi ham τ-yopiq bo‘lishi to‘g‘risida teoremani isbotini keltiramiz va kerakli xulosalar chiqaramiz.

Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n$ topologik fazolar va ularning $A_1 \subset X_1, A_2 \subset X_2, \dots A_n \subset X_n$ qism to‘plamlari berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$[A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n]_\tau = [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \dots \times [A_n]_\tau.$$

Isbot: Tenglikni birinchi qismida $([A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau \subset [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau)$ ekanligini isbotlash kerak:

$z_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau$ bo‘lsin, ya`ni z_0 nuqta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ dekart ko‘paytmaning τ-yopilmasiga tegishli. Demak, z_0 nuqta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ dekart ko‘paytmaning yopilmasiga tegishli bo‘ladi.

Har bir $pr_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$ proyektiv akslantirishni ko‘rib chiqaylik:

$\mathrm{pr}_i(z_0) = x_i, \quad i = 1,2, \dots, n.$

$f([A]_\tau) \subset [f(A)]_\tau$ga ko‘ra $\mathrm{pr}_i([A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau) \subset [\mathrm{pr}_i(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)]_\tau = [A_i]_\tau$ bo‘ladi va har bir $x_i \in [A_i]_\tau$.

Demak, $z_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau$, ya`ni:

$[A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau \subset [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau$

Tenglikni ikkinchi qismida $([A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau \subset [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau)$ ekanligini isbotlash kerak:

Endi, $z_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau$ bo‘lsin. $z_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau$ ekanligini isbotlaylik. τ-yopilma ta'rifi bo‘yicha

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \left(\bigcup \{\overline{B_1}: B_1 \subset A_1, |B_1| \le \tau\}\right) \times \left(\bigcup \overline{B_2}: B_2 \subset A_2, |B_2| \le \tau\right) \times \dots$$

$$\times \left(\bigcup \overline{B_\mathrm{n}}: B_\mathrm{n} \subset A_\mathrm{n}, |B_\mathrm{n}| \le \tau\right)$$

Bu degani, har bir x_i lar uchun shunday to‘plamlar mavjudki:

$x_1 \in [A_1]_\tau$, $\exists C_1 \subset A_1$ va C_1 ning yopig`i $\overline{C_1} \in \{\overline{B_1}: B_1 \subset A_1, |B_1| \le \tau\}$;

$x_2 \in [A_2]_\tau$, $\exists C_2 \subset A_2$ va C_2 ning yopig`i $\overline{C_2} \in \{\overline{B_2}: B_2 \subset A_2, |B_2| \le \tau\}$;

....;

$x_\mathrm{n} \in [A_\mathrm{n}]_\tau$, $\exists C_\mathrm{n} \subset A_\mathrm{n}$ va C_n ning yopig`i $\overline{C_\mathrm{n}} \in \{\overline{B_\mathrm{n}}: B_\mathrm{n} \subset A_\mathrm{n}, |B_\mathrm{n}| \le \tau\}$ bo‘ladi.

Bundan, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{C_1} \times \overline{C_2} \times \dots \times \overline{C_\mathrm{n}} = \overline{C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n}$ ekanligi kelib chiqadi.

U holda

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \left(\bigcup \{\overline{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_\mathrm{n}}: B_1 \times B_2 \times \dots \times B_\mathrm{n} \subset\right.$$

$$\left. A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, |B_1 \times B_2 \times \dots \times B_\mathrm{n}| \le \tau\}\right)$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau$ bilan mos keladi. Bundan kelib chiqadiki,

$$[A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau \subset [A_1 \times A_2 \downarrow \cdots \times A_n]_\tau$$

va shuning uchun, $[A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]_\tau = [A_1]_\tau \times [A_2]_\tau \times \cdots \times [A_n]_\tau$ bo‘ladi. Teorema isbotlandi. ■

Xulosa. Agar n ta elementdan tashkil topgan dekart ko‘paytmaning elementlari τ-yopiq bo‘lsa, n ta to‘plamning dekart ko‘paytmasi τ-yopiq bo‘ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. R. Engelking, General Topology, Sigma Ser. Pure Math., vol. 6, Verlag Helderman, 1989. https://proofwiki.org/wiki/Book%3ARyszard_Engelking/General_Topology/Revised_and_Completed_Edition?utm_source

2. Narmanov A.Y., Differensial geometriya va topologiya. Toshkent, 2018.

3. T.F.Jo‘rayev, Topologiyaga kirish. Toshkent, “Tafakkur-Bo‘stoni”, 2012. https://jdpu.uz/wp-content/uploads/2020/08/Topologiyaga-kirish.F.Jorayev.pdf

4. Sidney A. Morris, Topology without tears. 1985 https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/morris.pdf

5. I.Juhasz, Cardinal functions in topology – ten years later, Mathematical Center, Amsterdam, 1980. https://ir.cwi.nl/pub/12981?utm_source

6. Jo‘rayev R.M., Xolmatov D.D., τ-yopiq to‘plam haqida, “Актуальные проблемы современной геометрии и топологи” nomli xalqaro konferensiya. Toshkent, 2024. https://nuu.uz/wp-content/uploads/2024/10/PROGRAMMA-%D0%90%D0%9F%D0%A1%D0%93%D0%A2-2024.pdf

7. Jo‘rayev R.M., Xolmatov D.D., Character and weight of the space of τ-continuous functions. Zamonaviy matematikaning dolzarb muammolari va tatbiqlari: yosh olimlarning ilmiy konferensiyasi tezislar to‘plami. Toshkent, 2024.

International Journal of Science and Technology

Volume 2, Issue 2, October. 2025: